Allmän Relativitetsteori

Från postulat till Schwarzschildmetrik

Christian Leppänen

Uppsats för avläggande av naturvetenskaplig kandidatexamen i Fysik
15 hp

Institutionen för fysik
Göteborgs universitet

Naturvetenskapliga fakulteten

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Allmän Relativitetsteori

Från postulat till Schwarzschildmetrik

12 juni 2011

Författare:
Christian Leppänen
Guslepch@student.gu.se

Handledare:
Gabriele Ferretti
Examinator:
Bengt E W Nilsson

Abstract

In this bachelor thesis, we start with listing the postulates upon which the theory of general relativity is based. After that we go through the mathematics needed to describe the theory. We define the Riemann tensor, the covariant form of Maxwell's equations, we derive Einstein's equations and solve them for a spherically symmetric metric, the so-called Schwartzchild metric. We conclude this thesis with a calculation of how gravity affects the time for two observers with different distances from a gravitational well in Schwartzchild's metric.

Innehåll

1 Introduktion

Gravitation var länge inget annat än en enkel ekvation som beskrev hur två kroppar med massa attraherade varandra. Ingen djupare förståelse fanns för detta fenomen. Den allmänna relativitetsteorin som publicerades av Einstein år 1915 föreslog att denna attraktiva kraft beror på att materia kröker rumtiden. Denna krökning ger i sin tur upphov till det vi kallar gravitation. Men Einsteins relativitesteori ger också ett nytt sätt att uppfatta både sträckor och tid. Härmed försvann det absoluta rummet och den absoluta tiden. Einstein säger helt enkelt att inget har en tid, plats eller längd av sig själv utan dessa storheter har endast betydelse i jämförelse med någonting annat.

Syftet med detta arbete har varit att steg för steg gå igenom hur den allmänna relativitetsteorin är uppbyggd och på så vis få en djupare förståelse för teorin. Då detta är ett teoretiskt arbete har jag försökt att inte ta för stora steg i härledningarna så att det det ska vara lätt att följa med. Men även för att det ska bli tydligt att det är just denna teori vi får från postulaten vi börjar med.

2 Relativitet

Relativitetsteorin grundar sig på postulaten:

Ljusets konstanta hastighet i vakuum
Elektromagnetiska vågor fortplantar sig med en konstant hastighet i rumstiden oberoende av observatörens hastighet. Det vill säga: två obervatörer som iakttar samma elektromagnetiska vågor kommer att uppmäta samma hastighet hos vågorna även om obervatörerna i förhållande till varandra inte befinner sig i vila.

Ekvivalensprincipen
I ett lokalt ("tillräckligt litet") system går det ej att skilja på likformig acceleration och gravitation.

För att ekvivalensprincipen ska stämma gäller det att den tröga massan skall vara lika med den gravitationella massan

$$F = ma \tag{1}$$

$$F = G\frac{mM}{r^2}. \tag{2}$$

Om så är fallet får vi

$$a = G\frac{M}{r^2}. \tag{3}$$

För lokala system är r konstant och gravitation och acceleration urskiljbara. Vi kommer här att använda enheterna $c = \hbar = 1$. Där c är ljusets hastighet i vakuum och $\hbar$ är Planks konstant genom 2π.

3 Tensorer

Vi ska här gå igenom matematiken som behövs för att beskriva den allmänna relativitetsteorin.

3.1 Definition av kovariant och kontravariant

Definition 1 (Kontravariant)**.** En 4-dimensionell vektor vars element består av $A^\nu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ och transformeras i koordinatbyte enligt

$$A'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \tag{4}$$

kallas en kontravariant vektor. (μ och ν är här superskript, förväxla ej med exponent.)

För exempel se appendix.

Vi kommer här att följa Einsteins summakonvention och utelämna summatecknet (såsom gjorts i sista likheten för ekvation 4). Om ett index förekommer både uppe och nere är det underförstått att den ska summas över alla dimensioner. Här är $\mu = 0, 1, 2, 3$ ett så kallat fritt index. 0 är tidsdimensionen och $1, 2, 3$ rumsdimensionerna.

Definition 2 (Kovariant)**.** En kovariant vektor transformerar enligt

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu. \tag{5}$$

Båda den kovarianta vektorn och den kontravarianta vektorn i föregående definitioner är tensorer av rank 1. Rank beskriver storleken av tensorn. Rank n är en tensor med 4^n komponenter.

3.2 Aritmetik

Definition 3 (Multiplikation)**.** Multiplikation av två kontravarianta tensorer av rank 1 ger en kontravariant tensor av rank 2 genom

$$C^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu, \tag{6}$$

som innehåller komponenterna $C^{00}, C^{01}, C^{02}, C^{03}, C^{10}, C^{11}, ..., C^{33}$.

Detta ger en tensor av rank 2 med 16 komponenter. Analogt gäller för kovarianta tensorer. På liknande sätt är det möjligt att få tensorer av högre rank.

Definition 4 (Blandade tensorer)**.** Tensorer som innehåller både kontravarianta och kovarianta element kallas blandade tensorer,

$$C^{\mu}_{\nu} = A^{\mu} B_{\nu}. \tag{7}$$

Definition 5 (Kontraktion (innerprodukt))**.** Om vi i en blandad tensor sätter ett kontravariant index lika med ett kovariant index summar vi över indexet och får en tensor av lägre rank,

$$C^{\mu\nu}_{\nu} = A^{\mu\nu} B_{\nu} = C^{\mu}. \tag{8}$$

3.3 Metriken

Definition 6 (Metriken)**.** Den invarianta kvadraten av längdelementet ges av

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{9}$$

Där $g_{\mu\nu}$ är metriken.

En viktig egenskap hos metriken är att den alltid kan väljas diagonal och därmed symmetrisk,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \tag{10}$$

Detta beror på att valet av ordningen $dx^{\mu} dx^{\nu}$ inte spelar någon roll då det är samma objekt vars index bara döpts olika. För ett exempel se appendix.

Definition 7 (Inversen till metriken)**.** Vi definierar inversen till metriken genom

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu}. \tag{11}$$

Vi kan transformera mellan kovarianta och kontravarianta tensorer med hjälp av metriken

$$\begin{aligned} A_{\mu} &= g_{\mu\nu} A^{\nu} \\ A^{\mu} &= g^{\mu\nu} A_{\nu} \\ A_{\mu\rho} &= g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} A^{\nu\sigma} \\ A^{\mu\rho} &= g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} A_{\nu\sigma}. \end{aligned}$$

3.4 Volymelement och invarianta integraler

Metriken måste vara inverterbar. Detta medför att determinanten av metriken inte får vara 0. Av detta följer att determinanten på metriken inte kan byta tecken då den i så fall skulle vara 0 i övergången. Determinanten av

Minkowskimetriken är -1, Alltså är den negativa determinanten alltid positiv,

$$-g = -Det(g_{\mu\nu}). \tag{12}$$

Den transformeras enligt

$$-g' = -Det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau}g_{\mu\nu}\right) = Det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\right)Det\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\tau}\right)(-g). \tag{13}$$

Determinanterna av derivatorna är lika. Vi tar kvadratroten på båda sidor

$$\sqrt{-g'} = Det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\right)\sqrt{-g}. \tag{14}$$

Volymelementet

$$d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 \tag{15}$$

transformerar enligt

$$d^4x' = Det\left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\right)d^\mu x. \tag{16}$$

Multiplicerar vi nu ihop ekvation 14 och ekvation 16 får vi

$$\sqrt{-g'}d^4x' = \sqrt{-g}d^4x. \tag{17}$$

Detta visar att volymelementet $\sqrt{-g}d^4x$ är invariant. Vi kommer att använda oss av just detta volymselemet senare i integraler för att integralerna ska få samma form i alla koordinatsystem.

Definition 8. Invarianta integraler för verkan ges då av

$$S = \kappa\int\sqrt{-g}\mathscr{L}d^4x. \tag{18}$$

Där κ är en konstant och $\mathscr{L}$ är lagrangianen.

3.5 Christoffelsymbol

Vi kommer senare att stöta på ett objekt som kallas Christoffelsymbol. Vi ska redan här introducera symbolen och visa på några symmetrier.

Definition 9 (Christoffelsymbol)**.**

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right). \tag{19}$$

Då metriken är symmetrisk i sina två index följer att även Christoffelsymbolen är symmetrisk i sina kovarianta index. Värt att notera är att Christofelsymbolen i sig inte är en tensor då den inte följer transformeringsreglerna.

3.6 Invarians hos skalärer

Sats 3.1 (Invarians)**.** *Inreprodukten av en kontravariant tensor och en kovariant tensor är invariant*

$$A'^{\mu}B'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}B_{\tau} = \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}B_{\tau} = A^{\tau}B_{\tau}. \tag{20}$$

Här följer sista sambandet genom att $\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\nu}}$ *är en enhetsvektor som försvinner för alla termer utom för* $\nu = \tau$ *då den är 1.* □

Detta visar att en tensor av rank 0, dvs en skalär är invariant.

$$\varphi'(x') = \varphi(x). \tag{21}$$

3.7 Kovariant derivata

Vi ska nu härleda en derivata som applicerad på en tensor ger en ny tensor. Den så kallade kovarianta derivatan. Vi ska även undersöka hur denna derivata transformeras i koordinatbyte. Vi väljer en funktion som vi parametriserar med λ längst en geodetisk linje. Vi kommer senare att härleda villkoren som gäller för en geodetisk linje men behöver redan här använda oss av en av dess villkor.

$$\varphi'(x'(\lambda)) = \varphi(x(\lambda)). \tag{22}$$

Men även en liten bit $d\lambda$ av denna funktion måste då vara invariant

$$\frac{d}{d\lambda}\varphi'(x') = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \tag{23}$$

Det följer att även derivatan av HL måste vara invariant

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right) = \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} + \underbrace{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\mu}}\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2}}_{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\tau}}\frac{d^2x^{\tau}}{d\lambda^2}} \tag{24}$$

I sista termen är μ bara ett dummy index. Vi byter detta mot τ för att inte blanda ihop index. Om vi väljer funktionen φ att vara en geodesisk linje kan vi substituera med hjälp av ekvation 53. Där Γ ges av ekvation 19.

$$\frac{d^2x^{\tau}}{d\lambda^2} = -\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \tag{25}$$

Detta ger oss

$$\left(\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^{\tau}}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \tag{26}$$

Då faktorerna utanför parantesen är en tensor av rank 2 följer att även parantesen är en tensor av rank 2. Då de tillsammans ger en innerprodukt (kontraktion) som är en skalär. Vi har nu fått en tensor av rank 2. (Derivering av en skalär 2 gånger.)

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^\tau} \tag{27}$$

Av detta följer att en tensor av rank 1 ger oss en tensor av rank 2 genom kovariant derivering. På liknande sätt fås kovariant derivering av kontravarianta tensorer.

Definition 10 (Kovariant derivering för kovarianta tensorer)**.** Kovariant derivering av en tensor ger en tensor av högre rank.

$$A_{\mu;\nu} = D_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} A_\tau. \tag{28}$$

Definition 11 (Kovariant derivering för kontravarianta tensorer)**.**

$$A^\mu_{;\nu} = D_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\tau} A^\tau. \tag{29}$$

Vi ska nu se hur derivatan transformerar. Vi påminner oss om

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} A_\sigma, \qquad \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho}. \tag{30}$$

För transformationen gäller

$$D'_\nu A'_\mu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\rho \partial x'^\mu} A_\sigma + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} A_\sigma + \Gamma'^\sigma_{\mu\nu} \underbrace{\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\sigma} A_\tau}_{A'_\sigma}. \tag{31}$$

Vi vill att den nya derivatan ska följa transformeringsreglarna och kedjereglerna och definierar det som

$$\equiv \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{D}{D x^\rho} A_\sigma. \tag{32}$$

Vi slår ut den kovarianta derivatan för ekvationen ovan.

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} A_\sigma + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \Gamma^\tau_{\sigma\rho} A_\tau \tag{33}$$

Vi plockar bort termerna som är lika i ekvationerna 31 och 33. Detta ger oss

$$\Gamma'^\sigma_{\mu\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x^\rho \partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \Gamma^\tau_{\sigma\rho}. \tag{34}$$

Vi flyttar över andra termen i VL till HL och multiplicerar med $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\tau}}$ som vi sätter till $\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}}$ för att inte blanda ihop med μ i HL.

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma^{\tau}_{\sigma\rho} - \underbrace{\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\rho} \partial x'^{\mu}}}_{\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}}}. \tag{35}$$

4 Geodeter

Vi ska här se vad den ”kortaste” sträckan mellan två punkter i allmän geometri måste uppfylla. I plan geometri hade en geodet varit en rät linje mellan två punkter. Men då vi har ett rum som inte nödvändigvis är plant, och oftast inte är det, så kan en geodet i viss mån ses som ”den rätaste linjen mellan två punkter”.

Kvadraten av längdelementet i allmän geometri ges av

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{36}$$

Längden längst en kurva γ

$$L_\gamma[x] = \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{37}$$

som vi parametriserar med parametern λ

$$L_\gamma[x(\lambda)] = \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\nu}[x(\lambda)] \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = \int_\gamma \omega d\lambda. \tag{38}$$

Då vi vill hitta den ”kortaste” sträckan mellan två punkter låter vi x variera. Då vi bara vill ändra vägen mellan två punkter men inte punkterna i sig, säg A och B, gäller:

$$\delta x^\mu(A) = \delta x^\mu(B) = 0. \tag{39}$$

Integralen för variansen

$$L_\gamma[x + \delta x] = \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\nu}[x + \delta x] \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \right) \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \delta \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \right)} d\lambda \tag{40}$$

Där

$$\delta \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda}.$$

Vi utvecklar nu $\omega(x + \delta x)$ till andra termen.

$$\omega(x + \delta x) = \omega(x) + \frac{\partial \omega(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \tag{41}$$

och

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial x^\mu} = 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} \Leftrightarrow \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial x^\mu} \tag{42}$$

41 och 42 ger oss utveckligen

$$\omega(x+\delta x) = \omega(x) + \frac{1}{2\omega}\frac{\partial\omega(x)^2}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \tag{43}$$

Variansen ges av skillnaden mellan kurvorna

$$L_\gamma[x+\delta x] - L_\gamma[x] = \int_\gamma \frac{1}{2\omega}\delta\omega^2 d\lambda = \tag{44}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu}\delta\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\right)d\lambda \tag{45}$$

Pga symmetriskäl är de två sista termerna i 44 identiska

$$\int_\gamma \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\delta x^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + 2g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\right)d\lambda. \tag{46}$$

Vi utför en partialintegration för att få variansen i en egen term

$$\int_\gamma \left[\frac{1}{2\omega}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\mu\rho}}{\omega}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\right]\delta x^\rho d\lambda + \frac{g_{\mu\nu}}{\omega}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\delta x^\nu\Big|_A^B. \tag{47}$$

Då vi inte ändrar på ändpunkterna ger den sista termen 0. Variationen ges av integralen. För en geodet kräver vi att den är 0. Vilket den endast kan vara om termen innanför hakparanterna är 0.

$$\frac{1}{2\omega}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{\mu\rho}}{\omega}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) = 0. \tag{48}$$

Vi slår med derivatan

$$\frac{1}{2\omega}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\omega}\right)g_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{g_{\mu\rho}}{\omega}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0. \tag{49}$$

Vi antar att ω är konstant, varav andra termen ger 0. Vi multiplicerar med $-\omega$ och ordnar om termerna.

$$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{50}$$

Vi skriver om

$$\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu}\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}. \tag{51}$$

Detta ger oss

$$g_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{52}$$

Vi multiplicerar med $g^{\sigma\tau}$ för att få villkoret vi sökte.

Definition 12. (Geodetiska kurvor) Detta är ekvationen för geodetiska kurvor. Dvs den ”kortaste” vägen mellan två punkter.

$$\frac{d^2x^\tau}{d\lambda^2} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{53}$$

där

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right). \tag{54}$$

Vi ska nu visa att antagandet att ω är konstant med avseende på λ är kompatibelt med resultatet vi fick. Detta gör vi genom att visa

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\omega^2\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right) = 0. \tag{55}$$

Vi slår med derivatan och ser att de två sista termerna är identiska. Vi använder oss av ekvation 53 för att byta ut $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} - g_{\mu\nu}g^{\zeta\mu}\left(\frac{\partial g_{\tau\zeta}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\zeta\rho}}{\partial x^\tau} - \frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^\zeta}\right)\frac{dx^\tau}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \tag{56}$$

Här är

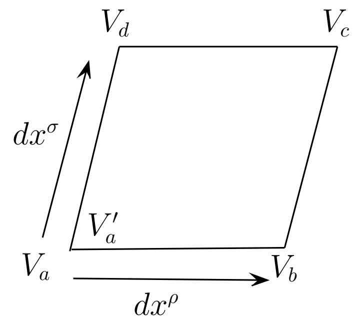
$$g_{\mu\nu}g^{\zeta\mu} = \delta^\zeta_\nu, \tag{57}$$

vilket betyder att bara de termerna där $\nu = \zeta$ blir kvar. Vi döper om lite index och lyfter bort parantesen $\tau \to \sigma$, $\rho \to \mu$

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}\right)\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{58}$$

Den första och andra termen tar ut varandra då $g_{\mu\nu}$ är symmetrisk. Då vi inte har några fria index i någon av de andra termerna följer det att alla index är summationsindex. Namnet för detta index har ingen betydelse alltså följer det att dessa två termer tar ut varandra.

5 Riemanntensorn



Figur 1: Parallelförflyttning med start- och slutpunkt i samma punkt

Vi ska nu parallelförflytta en vektor V_μ runt en romb med hörnen V_a, V_b, V_c och V_d och sedan tillbaka till V_a. Vi särskiljer vektorn som transporterats runt genom att ge den ett prim när den väl flyttats runt, V'_a. Ändringen i vektorn ges av

$$[(V_c - V_d) - (V_b - V_a)] - [(V_c - V_b) - (V_d - V'_a)] = V_a - V'_a \tag{59}$$

Då vi låter längden av rombens sidor gå mot noll och det är en parallelförflyttning vi gör så övergår ekvationen till kovarianta derivator.

$$\begin{aligned} V_c - V_d &\to dx^\sigma D_\sigma V_\mu \\ V_b - V_a &\to dx^\sigma D_\sigma V_\mu \\ V_c - V_b &\to dx^\rho D_\rho V_\mu \\ V_d - V'_a &\to dx^\rho D_\rho V_\mu \end{aligned}$$

Men vad är nu skillnaden mellan första och andra kovarianta derivatan. Det måste vara den vertikala skillnaden multiplicerat med en liten förflyttning dx^ρ. Liknanade argumet för tredje och fjärde termen. Vi får då skillnaden mellan två kovarianta derivator multiplicerade med varandra i omvänd ordning. Detta känner vi igen som kommutatorn. Förändringen i V_μ ges alltså av

$$\delta V_\mu = dx^\sigma dx^\rho \left[D_\rho, D_\sigma\right] V_\mu. \tag{60}$$

Vi ska nu undersöka $\left[D_\rho, D_\sigma\right] V_\mu$ närmare.

$$
\begin{aligned}
\left[D_\rho, D_\sigma\right] V_\mu = D_\rho D_\sigma V_\mu - D_\sigma D_\rho V_\mu = \\
\partial_\rho D_\sigma V_\mu - \Gamma^\tau_{\sigma\rho} D_\tau V_\mu - \Gamma^\tau_{\mu\rho} D_\sigma V_\tau - \partial_\sigma D_\rho V_\mu + \Gamma^\tau_{\rho\sigma} D_\tau V_\mu + \Gamma^\tau_{\mu\sigma} D_\rho V_\tau = \\
\partial_\rho \partial_\sigma V_\mu - \Gamma^\tau_{\mu\rho} \partial_\sigma V_\tau - \partial_\rho \Gamma^\tau_{\mu\sigma} V_\tau + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\tau_{\lambda\sigma} V_\tau - \partial_\sigma \partial_\rho V_\mu + \Gamma^\tau_{\mu\sigma} \partial_\rho V_\tau + \\
\partial_\sigma \Gamma^\tau_{\mu\rho} V_\tau - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\tau_{\lambda\rho} V_\tau
\end{aligned}
$$

Ordinarie derivator kommuterar. Kommutatorn mellan en funktion av x och derivatan med avseende på x ger

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x)\right] = \frac{\partial f(x)}{\partial x}. \tag{61}$$

Γ är en funktion av koordinaterna då den består av derivator av metriken som i sin tur beror på position. Detta leder till att vi kan förenkla uttrycket ytterligare till

$$\left[D_\rho, D_\sigma\right] V_\mu = \left[\frac{\partial \Gamma^\tau_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\tau_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\tau_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\tau_{\lambda\rho}\right] V_\tau = R^\tau_{\mu\rho\sigma} V_\tau. \tag{62}$$

Definition 13 (Krökning)**.** Riemanntensorn $R^\tau_{\mu\rho\sigma}$ ger krökningen av rummet. För ett 4-dimensionellt rum gäller

$$R^\tau_{\mu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^\tau_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\tau_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\tau_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\tau_{\lambda\rho}. \tag{63}$$

Definition 14. Om vi sätter det kontravarianta indexet till det andra kovariana indexet får vi Riccitensorn.

$$R_{\mu\sigma} = R^\rho_{\mu\rho\sigma}. \tag{64}$$

Definition 15. Innerprodukten för Riccitensorn ger krökningskalären

$$R = g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma} = R^\mu_\mu. \tag{65}$$

5.1 Egenskaper hos Riemanntensorn

Låt oss undersöka vissa av Riemanntensorns egenskaper. För att lättare kunna se symmetrier ska vi undersöka den helt kovarianta Riemanntensorn

$$R_{\lambda\mu\rho\sigma} \equiv g_{\lambda\tau} R^\tau_{\mu\rho\sigma}. \tag{66}$$

Vi skriver ut den kovarianta Riemanntensorn mer explicit.

$$\begin{aligned}R_{\lambda\mu\rho\sigma} = &\frac{1}{2}g_{\lambda\tau}\partial_\sigma(g^{\eta\tau}(\partial_\rho g_{\mu\eta} + \partial_\mu g_{\eta\rho} - \partial_\eta g_{\mu\rho})) \\ &-\frac{1}{2}g_{\lambda\tau}\partial_\rho(g^{\eta\tau}(\partial_\sigma g_{\mu\eta} + \partial_\mu g_{\eta\sigma} - \partial_\eta g_{\mu\sigma})) \\ &+g_{\lambda\tau}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\tau_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\tau_{\lambda\rho}\right).\end{aligned} \tag{67}$$

Vi kan skriva om derivatan av metriken genom sambanden

$$\partial_\sigma(g_{\lambda\tau}g^{\eta\tau}) = \partial_\sigma\delta^\eta_\lambda = \partial_\sigma(g_{\lambda\tau})g^{\eta\tau} + g_{\lambda\tau}\partial_\sigma(g^{\eta\tau}) = 0 \tag{68}$$

$$=> g_{\lambda\tau}\partial_\sigma(g^{\eta\tau}) = -g^{\eta\tau}\partial_\sigma(g_{\lambda\tau}) = -g^{\eta\tau}\left(\Gamma^\kappa_{\sigma\lambda}g_{\kappa\tau} + \Gamma^\kappa_{\sigma\tau}g_{\kappa\lambda}\right). \tag{69}$$

Analogt för den andra termen.

Detta ger oss

$$\begin{aligned}R_{\lambda\mu\rho\sigma} = &-\frac{1}{2}g^{\eta\tau}\left(\Gamma^\kappa_{\sigma\lambda}g_{\kappa\tau} + \Gamma^\kappa_{\sigma\tau}g_{\kappa\lambda}\right)(\partial_\rho g_{\mu\eta} + \partial_\mu g_{\eta\rho} - \partial_\eta g_{\mu\rho}) \\ &+\frac{1}{2}\delta^\eta_\lambda\partial_\sigma(\partial_\rho g_{\mu\eta} + \partial_\mu g_{\eta\rho} - \partial_\eta g_{\mu\rho}) \\ &+\frac{1}{2}g^{\eta\tau}\left(\Gamma^\kappa_{\rho\lambda}g_{\kappa\tau} + \Gamma^\kappa_{\rho\tau}g_{\kappa\lambda}\right)(\partial_\sigma g_{\mu\eta} + \partial_\mu g_{\eta\sigma} - \partial_\eta g_{\mu\sigma}) \\ &-\frac{1}{2}\delta^\eta_\lambda\partial_\rho(\partial_\sigma g_{\mu\eta} + \partial_\mu g_{\eta\sigma} - \partial_\eta g_{\mu\sigma}) \\ &+g_{\lambda\tau}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\tau_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\tau_{\lambda\rho}\right).\end{aligned} \tag{70}$$

Om vi nu slår ut deltat och samlar ihop termerna och skriver om den första och tredje raden i form av Γ får vi

$$\begin{aligned}R_{\lambda\mu\rho\sigma} = &\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\sigma} + \partial_\rho\partial_\lambda g_{\mu\sigma}\right) \\ &-\left(\Gamma^\kappa_{\sigma\lambda}g_{\kappa\tau} + \Gamma^\kappa_{\sigma\tau}g_{\kappa\lambda}\right)\Gamma^\tau_{\mu\rho} \\ &+\left(\Gamma^\kappa_{\rho\lambda}g_{\kappa\tau} + \Gamma^\kappa_{\rho\tau}g_{\kappa\lambda}\right)\Gamma^\tau_{\mu\sigma} \\ &+g_{\lambda\tau}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\rho}\Gamma^\tau_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\tau_{\lambda\rho}\right).\end{aligned} \tag{71}$$

Andra och tredje raden tar ut varandra och vi får kvar (efter att bytt ut lite index för att lättare kunna se symmetrierna)

$$\begin{aligned}R_{\lambda\mu\rho\sigma} = &\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu g_{\lambda\rho} - \partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\sigma} + \partial_\rho\partial_\lambda g_{\mu\sigma}\right) \\ &+g_{\eta\tau}\left(\Gamma^\eta_{\rho\lambda}\Gamma^\tau_{\mu\sigma} - \Gamma^\eta_{\sigma\lambda}\Gamma^\tau_{\mu\rho}\right).\end{aligned} \tag{72}$$

Vi ser att den kovarianta Rimanntensorn är antisymmetrisk i de två första indexerna och de två sista och även att den är symmetrisk på vänster och höger par av index.

$$R_{\lambda\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\lambda\rho\sigma} = -R_{\lambda\mu\sigma\rho} \tag{73}$$

$$R_{\lambda\mu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\lambda\mu} \tag{74}$$

Vad som kanske är mindre uppenbart är den så kallade Bianchi-identiteten, nämligen

$$R_{\lambda\mu\rho\sigma} + R_{\lambda\rho\sigma\mu} + R_{\lambda\sigma\mu\rho} = 0. \tag{75}$$

Detta inses genom att använda sig av den sista definitionen av $R_{\lambda\mu\rho\sigma}$ i ekvation 72.

Riemanntensorn är en stor tensor, n^4 komponenter för n dimensioner, men inte alla komponenter är oberoende av varandra. Detta ser vi på Bianchi-identiteten och de symmetriska och antisymmetriska sambanden mellan komponenterna.

6 Maxwells ekvationer

Vi ska här härleda den kovarianta formen av Maxwells ekvationer för det tomma rummet.

6.1 Definition

I ordinär form för tomma rummet ges Maxwells ekvationer av

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{76}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{77}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{78}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{79}$$

Av ekvation 77 får vi att $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Där $\vec{A}$ är den magnetiska vektorpotentialen. Om vi lägger in detta i ekvation 78 och flyttar över till andra sidan får vi $\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$. Detta betyder att vi kan skriva $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot V$. Så vi får $\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot V\right)$.

Definition 16. Vi definierar den elektromagnetiska 4-potentialen

$$A^\mu = (V, A_x, A_y, A_z) \tag{80}$$

och den elektromagnetiska tensorn

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{81}$$

Vi ser på definitionen att $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Vilket betyder att $diag(F_{\mu\nu}) = 0$. $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$, där $diag(\eta^{\mu\nu}) = (+1, -1, -1, -1)$ och resten av elementen för $\eta^{\mu\nu}$ är 0. Detta är Minkowskimetriken från den speciella relativitetsteorin. Vi får då

$$\begin{aligned}
F_{00} &= 0 \\
F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 &= \partial_0 \eta^{11} A_1 - \partial_1 \eta^{00} A_0 = \\
-\partial_0 A^1 - \partial_1 A^0 &= -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} = E_x \\
F_{02} = \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 &= \partial_0 \eta^{22} A_2 - \partial_2 \eta^{00} A_0 = \\
-\partial_0 A^2 - \partial_2 A^0 &= -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y} = E_y
\end{aligned}$$

och liknande för det andra komponenterna. Detta ger oss formen

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \tag{82}$$

för den elektromagnetiska tensorn.

6.2 Principen för minsta verkan

Verkan i Minkowskigeometri ges av integralen

$$S = \kappa \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x. \tag{83}$$

Vi ska nu variera $F_{\mu\nu}$ så att $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$. Dvs $F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu}$, men endast för $\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu$, och endast för de vilka störningen vid alla oändligheter försvinner.

För att få den minsta verkan stör vi kurvan och finner minimum.

$$\delta S = \kappa \int \left(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu\right) F^{\mu\nu} d^4x = 0. \tag{84}$$

Både första och andra termen ger samma bidrag då det multipliceras med den antisymmetriska tensorn $F^{\mu\nu}$.

$$\delta S = 2\kappa \int \partial_\mu \delta A_\nu F^{\mu\nu} d^4x. \tag{85}$$

Vi gör en partialintegration

$$\delta S = 2\kappa \int \left[\partial_\mu \left(\delta A_\nu F^{\mu\nu}\right) - \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}\right] d^4x = \tag{86}$$

$$2\kappa \delta A_\nu F^{\mu\nu} \Big|_{+\infty}^{-\infty} - 2\kappa \int \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} d^4x = 0. \tag{87}$$

Första termen försvinner då vi krävde detta i definitionen. Vilket betyder att $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Detta är rörelse-ekvationerna för elektromagnetiska vågor.

6.3 Maxwells ekvationer på kovariant form

Vi ska här visa att $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ är ekvivalent med Maxwells ekvationer. För $\nu = 0$ får vi

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \vec{\nabla} \vec{E} = 0. \tag{88}$$

Precis i enlighet med ekvation 76. För resten får vi

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = -\frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 - \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \tag{89}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 2} = -\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - 0 - \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \tag{90}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 3} = -\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - 0 = 0. \tag{91}$$

Om vi adderar alla dessa ekvationer får vi ekvation 79. Dessa två ekvationer är Maxwells rörelse-ekvationer för elektromagnetiska vågor.
De två andra Maxwell ekvationerna får vi genom identiteten, som vi här bara visar åt ena hållet.

Sats 6.1.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu => \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{92}$$

Vi lägger in definitionen av $F_{\mu\nu}$, flyttar över den ena termen och får

$$\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\partial_\rho\partial_\mu A_\nu = \epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\partial_\rho\partial_\nu A_\mu \tag{93}$$

Vi använder oss av den antisymmetriska Levi-Civitatensorns egenskaper och skriver om den sista termen i ovanstående ekvation

$$\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\partial_\rho\partial_\mu A_\nu = -\epsilon^{\rho\nu\mu\lambda}\partial_\rho\partial_\mu A_\nu. \tag{94}$$

Och identiteten följer. □

Från

$$\epsilon^{\rho\mu\nu 0}\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \tag{95}$$

följer ekvation 77.

Den sista ekvationen, nämligen ekvation 78 följer från att addera ekvationerna $\lambda = 1, 2, 3$.

Vi har endast visat detta för Minkowskimetrik, men detta är tillräckligt. För allmän metrik övergår den ordinära derivatan till en kovariant derivata, $\partial_\mu F^{\mu\nu} \to D_\mu F^{\mu\nu}$ och vi definierar

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu. \tag{96}$$

Men då Christoffelsymbolen är symmetrisk i sina två kovarianta index, följer det att

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{97}$$

7 Einsteins ekvationer

Verkan S för rumtiden och energin har formen

$$S = \frac{1}{l^2} \int \sqrt{-g} \mathscr{L} d^4x + \kappa \int \sqrt{-g} \left[F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \right] d^4x. \tag{98}$$

Vi ska här göra en dimensionsanalys för att avgöra formen för $\mathscr{L}$. $[S]$ och $[\sqrt{-g}]$ är dimensionslösa. Medan $[d^4x] = L^4$ och $[l^2] = L^2$. Alltså måste $[\mathscr{L}] = L^{-2}$. Lagrangianen $\mathscr{L}$ kan vi endast vara uppbyggd av metriken och dess derivator, vi kräver även att det skall vara en skalär.

$$\begin{array}{lll} [g_{\mu\nu}] = L^0 & [\Gamma] = L^{-1} & [\partial_\mu] = L^{-1} \\ [R_{\mu\nu\rho\sigma}] = L^{-2} & [R_{\mu\nu}] = L^{-2} & [R] = L^{-2} \\ [D_\mu] = L^{-1} & & \end{array}$$

Formen för $\mathscr{L}$ blir

$$\mathscr{L} = \frac{c_1}{l^2} + c_2 R + l^2 (...) + ... \tag{99}$$

Där de sista termerna utgår, då l är väldigt litet. Det undersöks dock teorier där man inkluderar fler av termerna då dessa kan vara intressanta för exemeplvis en kvantgravitations teori. Vi ser här att $c_2 = 1$ då denna konstanten beror på hur vi väljer l.

7.1 Principen för minsta verkan

Verkan för rumtiden och energin ges av

$$S = \frac{1}{l^2} \int \sqrt{-g} \left[\frac{c_1}{l^2} + R \right] d^4x + \kappa \int \sqrt{-g} \left[F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \right] d^4x \tag{100}$$

Vi ska nu ta och variera detta med avseende på metriken. Alltså $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ Variansen för verkan blir då

$$
\begin{aligned}
\delta S = \frac{1}{l^2}\delta \int \sqrt{-g}\left[\frac{c_1}{l^2} + R\right] d^4x + \kappa\delta\int \sqrt{-g}\left[F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho}\right] d^4x = \\
\frac{1}{l^2}\int \left[\frac{c_1}{l^2}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + \right. \\
\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}R + \sqrt{-g}\left(-g^{\lambda\mu}g^{\sigma\nu}\delta g_{\mu\nu}\right)R_{\lambda\sigma} + \\
\left.\sqrt{-g}g^{\lambda\sigma}\delta\left(R_{\lambda\sigma}\right)\right] d^4x \\
+\kappa\int\left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} - 2\sqrt{-g}g_{\sigma\rho}\delta g_{\mu\nu}F^{\nu\rho}F^{\mu\sigma}\right] d^4x = \\
\frac{1}{l^2}\int \sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}\left[\frac{c_1}{l^2}g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - R^{\mu\nu}\right. \\
\left. +\kappa\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} - 2g_{\sigma\rho}F^{\mu\sigma}F^{\nu\rho}\right]\right] d^4x = 0.
\end{aligned} \tag{101}
$$

Här försvinner variansen av Riccitensorn när vi integrerar då detta är en full derivata.

$$
\begin{aligned}
\delta\left(R_{\lambda\sigma}\right) = \\
\partial_\sigma\delta\left(\Gamma^\rho_{\lambda\rho}\right) - \partial_\rho\delta\left(\Gamma^\rho_{\lambda\sigma}\right) + \delta\left(\Gamma^\tau_{\lambda\rho}\right)\Gamma^\rho_{\sigma\tau} + \\
\Gamma^\tau_{\lambda\rho}\delta\left(\Gamma^\rho_{\sigma\lambda}\right) - \delta\left(\Gamma^\tau_{\lambda\sigma}\right)\Gamma^\rho_{\rho\tau} - \Gamma^\tau_{\lambda\sigma}\delta\left(\Gamma^\rho_{\rho\tau}\right) = \\
D_\sigma\left(\delta\Gamma^\rho_{\lambda\rho}\right) - D_\rho\left(\delta\Gamma^\rho_{\lambda\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{102}
$$

Detta betyder att den stora parantesen för ekvation 101 är 0. Vi sätter $\kappa = \frac{1}{2}$, $\frac{c_1}{2l^2} = \Lambda$ och $l^2 = -8\pi G$. Där G är Newtons konstant. Detta för att Einsteins ekvationer ska reduceras till Newtons ekvationer för klassiska fall.

Definition 17. Vi definierar även stress-energitensorn

$$
T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + g_{\sigma\rho}F^{\mu\sigma}F^{\nu\rho} \tag{103}
$$

Vi byter teckan och multiplicerar med metriken så vi får den kovarianta formen. Detta ger oss Einsteins ekvationer

Definition 18. (Einsteins ekvationer)

$$
R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{104}
$$

Här är Λ den kosmologiska konstanten. Einsteins ekvationer beskriver hur rumtiden påverkas av energi och massa.

8 Schwarzschilds lösning

Vi ska här ansätta en lösning för Einsteins ekvationer i det tomma rummet ($T_{\mu\nu} = 0$) för en sfärisk symmetrisk metrik som endast beror på avståndet r.

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{105}$$

Detta är en Ricciplatt metrik så $R = 0$. Einsteins ekvationer reduceras till

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{106}$$

$R_{\mu\nu}$ är endast uppbyggd av Γ och dess derivator. Prim är derivata med avseende på r. De som är nollskiljda är

$$\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \tfrac{B'}{2B}$$

$$\Gamma^r_{tt} = \tfrac{B'}{2A} \quad \Gamma^r_{rr} = \tfrac{A'}{2A} \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\tfrac{r}{A} \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -\tfrac{r\sin^2\theta}{A}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \tfrac{1}{r} \quad \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \tfrac{1}{r} \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$$

Detta ger oss fyra ekvationer

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{1}{4}\frac{B'}{A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rA} = 0 \tag{107}$$

$$R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4}\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rA} = 0 \tag{108}$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2A}\left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A}\right) + \frac{1}{A} = 0 \tag{109}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} = 0. \tag{110}$$

Vi använder oss av att

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) = 0. \tag{111}$$

Det följer att parantesen måste vara noll. Vilket ger att

$$AB = konstant. \tag{112}$$

Vi kräver även att lösningen ska övergå i minkowskimetriken för stora avstånd.

$$\lim_{r\to\infty} A(r) = \lim_{r\to\infty} B(r) = 1. \tag{113}$$

Alltså är A och B inverser till varandra

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \tag{114}$$

Om vi använder oss av detta faktum för $R_{\theta\theta}$ får vi

$$R_{\theta\theta} = -1 + \underbrace{rB' + B}_{\frac{d}{dr}(rB)} = 0. \tag{115}$$

Första lösningen $B = 1$ ger Minkowskimetriken. Den andra lösningen är

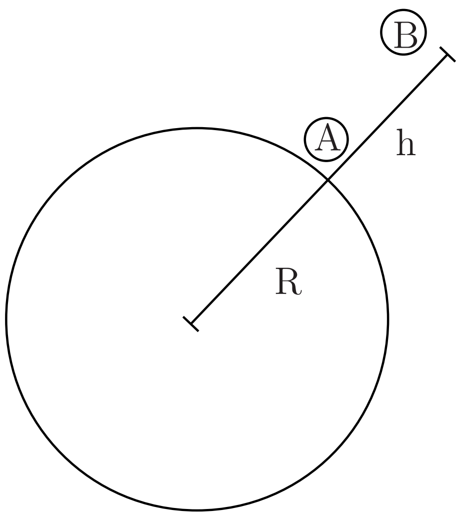
$$rB = r + konstant. \tag{116}$$

Då $g_{tt} = -B$ kräver vi att den ska övergå i $(-1 - 2\Phi)$. Där Φ är Newtons potential, $-\frac{MG}{r}$. Vi får slutligen formen

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{117}$$

8.1 Tid i Schwartzschildsmetrik

Vi ska nu tillämpa Schwartzschilds lösning för att se hur tiden förhåller sig för två obervatörer i rumtiden.



Figur 2: Observatör A befinner sig närmare gravitationskällan än observatör B

En observatör A befinner sig i $\vec{x} = \vec{x_a}$, med avstånd R från en gravitationskälla, medan observatör B befinner sig i $\vec{x} = \vec{x_b}$, på avstånd $R + h$ från källan. För båda observatörer ges egentiden av

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{118}$$

För vårt fall så är $dr = 0$, $d\theta = 0$, och $d\phi = 0$ Så obervatörernas tid förhåller sig till varandra enligt

$$g_{tt}(\vec{x_a}) dt_a^2 = g_{tt}(\vec{x_b}) dt_b^2. \tag{119}$$

För Schwartzschildmetrik är $g_{tt} = 1 - \frac{2MG}{r}$. Tiden för A förhåller sig till B genom

$$dt_a = \sqrt{\frac{1 - \frac{2MG}{R+h}}{1 - \frac{2MG}{R}}} dt_b \approx \left[1 + GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)\right] dt_b. \tag{120}$$

Detta betyder att tiden går snabbare för en observatörer som befinner sig längre ifrån gravitationskällor än det gör för en observatörer som befinner sig närmare. Tiden är alltså relativ och inte absolut så som i Newtons teori. Detta är ett fenomen som bekräftas experimentellt varje dag då det är något man måste ta hänsyn till för klockorna hos GPS-satelliter för att systemet ska fungera.

9 Appendix

Ex. För det 2-dimensionella fallet för polära koordinater gäller

$$
\begin{aligned}
x^1 = x, x^2 = y, x'^1 = r\cos\theta, x'^2 = r\sin\theta \\
A'^1 = \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}A^1 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^2}A^2 = \frac{\partial r\cos\theta}{\partial x}A^1 + \frac{\partial r\cos\theta}{\partial y}A^2 \\
= \frac{x\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}A^1 + \frac{y\cos\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}A^2 \\
A'^2 = \frac{\partial r\sin\theta}{\partial x}A^1 + \frac{\partial r\sin\theta}{\partial y}A^2 = \frac{x\sin\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}A^1 + \frac{y\sin\theta}{\sqrt{x^2+y^2}}A^2.
\end{aligned}
$$

9.1 Ex. 3D sfär

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{121}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{122}$$

$$z = r\cos\theta \tag{123}$$

Kvadraten av längdelementet för ytan på en sfär ges av

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi. \tag{124}$$

Metriken är då

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{125}$$

En geodet på sfären måste uppfylla

$$\frac{d^2x^\tau}{d\lambda^2} + \Gamma^\tau_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{126}$$

Mer explicit

$$\frac{d^2x^\tau}{d\lambda^2} + \frac{1}{2}g^{\theta\tau}\left(\frac{\partial g_{\mu\theta}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\theta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\theta}\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + \tag{127}$$

$$\frac{1}{2}g^{\phi\tau}\left(\frac{\partial g_{\mu\phi}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\phi\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\phi}\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{128}$$

Vi börjar med att undersöka $\tau = \theta$. Vi får endast bidrag av $\sigma = \theta$. Vi skriver ut den termen mer explicit.

$$
\begin{aligned}
&(\mu = \theta)\\
&\frac{d^2x^\theta}{d\lambda^2} + \\
\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^\theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^\theta}\right)&\frac{dx^\theta}{d\lambda}\frac{dx^\theta}{d\lambda} + \\
\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^\phi} + \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial x^\theta} - \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial x^\theta}\right)&\frac{dx^\theta}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{d\lambda} + \\
&(\mu = \phi)\\
&\frac{d^2x^\theta}{d\lambda^2} + \\
\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial x^\phi} - \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial x^\theta}\right)&\frac{dx^\phi}{d\lambda}\frac{dx^\theta}{d\lambda} + \\
\frac{1}{2}g^{\theta\theta}\left(\frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial x^\phi} + \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial x^\phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta}\right)&\frac{dx^\phi}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{d\lambda} = 0.
\end{aligned}
$$

Vi får ett bidrag av $-\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta} = -r^2 \sin(2\theta)$. Detta ger oss kravet

$$\frac{d^2x^\theta}{d\lambda^2} - \frac{\sin(2\theta)}{2}\frac{dx^\phi}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{d\lambda} = 0. \tag{129}$$

För $\tau = \phi$ får vi endast bidraget från termen $g^{\phi\phi}$. Vi får då två derivator som är nollskiljda av $\frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta} = r^2 \sin(2\theta)$. Detta ger oss kravet

$$\frac{d^2x^\phi}{d\lambda^2} + \frac{\sin(2\theta)}{\sin^2\theta}\frac{dx^\theta}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{d\lambda} = 0. \tag{130}$$

För ytan på en 3D sfär gäller alltså

$$\frac{d^2x^\theta}{d\lambda^2} - \frac{\sin(2\theta)}{2}\frac{dx^\phi}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{d\lambda} = 0 \tag{131}$$

$$\frac{d^2x^\phi}{d\lambda^2} + \frac{\sin(2\theta)}{\sin^2\theta}\frac{dx^\theta}{d\lambda}\frac{dx^\phi}{d\lambda} = 0 \tag{132}$$

för geodesiska kurvor.

Referenser

[1] The Foundation of the General Theory of Relativity (English translation), *Albert Einstein*, The collected papers of Albert Einstein volume 6

[2] Gravitation and cosmology, *Steven Weinberg*, från 1972

[3] Mathematical Methods for Physicists, *Arfken & Weber*, sixth edition

[4] Stanford lectures:
http://www.youtube.com/view_play_list?p=6C8BDEEBA6BDC78D, *Leonard Susskind*